508. 面分ノ脈ニ就イテ

寺阪英孝（阪大）

Dヲ平面上ノ面分，$\dot{D}$ヲソノ境界トスル。今Dニ含マレル円盤Kデソノ周$\dot{K}$ガ$\dot{D}$ト少クモ二点ヲ共有スルモノヲDニ重内接スル円ト云ヒ、Dノ凡ユル重内接円ノ中心ノ集合ヲDノ脈（*Nerv*）——葉脈ノヤウナ格好ダカラ——ト云フコトニスル。脈ハ又$\dot{D}$ヘノ最短距離ノ点ガ二ツ以上アル如キDノ内点ノ集合トモ考ヘラレル。脈ニツイテハ次ノ定理ガ得ラレル。

$\boxed{\text{定理一}}$　単一連結ノ面分ノ脈上ノ任意ノ二点ハ，脈ニ含マレル単一連結曲線弧（*Jordanbogen*）デ唯一通リニ結ビ得ル。

以下コノ定理ヲ証明スル。

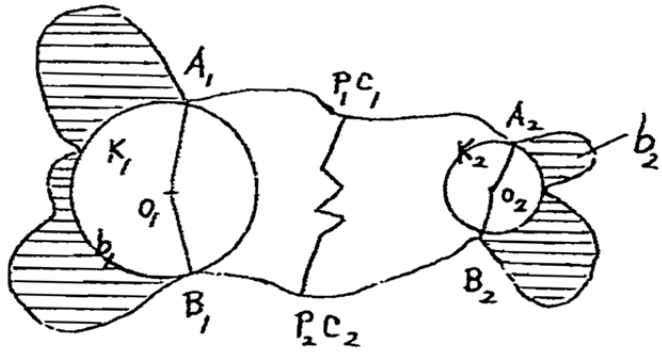
§1. Dニ重内接スル円盤K_1ノ周$\dot{K}_1$ハ$\dot{D}$ニヨッテ二ツ以上ノ弧$a_1, a_2,$------ニ分タレ$D-\overline{K}_1$ナル開集合ハ二ツ以上ノ開因子（即チ面分）ニ分タレテ、K_1円ト上記ノ円弧$a_1,$-------ニヨッテ連結サレルカラ，i番目ノa_iニ由ッテK_1トツナガル因子ヲD_iトスル。

今Dニ重内接スル第二ノ円盤K_2（$K_2 \neq K_1$）ヲ考ヘル

ト K_2 ハ $D_1, D_2, \cdots\cdots$ ノ何レカ一ツト共通点ヲモツカ、違ツタ二ツニ同時ニ共通点ヲ持ツコトハナイコトハ、K_1, K_2 ガ円盤デアルコトカラ明デアル。ソコヲ K_2 ト共通点ヲモツモノヲ D_1 トスレバ、K_2 ガ $\dot{D}$ ト切スル点トイフノハ實ハ $\dot{D}_1$ （D_1 ノ境界）上ノ点デアル。但シコヽニ D トカ D_1 トカノ境界ノ点ト云フノハ D 或ハ D_1 ノ内部カラ境界ニ近ヅクノ意味ノ境界点デ、所謂境界子（*Primende*）トシテノ境界点デアル.

D ノ境界子ハ D ガ単一連結ダカラ単位円ノ周ノ点ト一一ノ對應ガツケラレテキル譯デアルカラ、コノ順序ヲ考ヘルト $\dot{K}_1 \cdot \dot{D}$ ト $\dot{K}_2 \cdot \dot{D}$ トハ $\dot{D}$ ノ境界子トシテ互ニ他ヲ分タナイコトニナル。

§2. 今 D ニ重内接スル二ツノ円ヲ K_1, K_2，中心ヲ夫々 O_1, O_2 トシ，$D-\overline{K}_1$ ノ開因子デ K_2 ト素ナルモノヲ横線デ消シ、又 $D-\overline{K}_2$ ノ開因子デ K_1 ト素ナルモノヲモ消スト，



残ツタ部分ノ内核（面分）ヲ D' トスレバ、D' ハ円弧 $\widehat{A_1B_1}=b_1$，円弧 $\widehat{A_2B_2}=b_2$ ト $\dot{D}$ ノ境界ノ一部分 $\widehat{A_1A_2}=C_1$, $\widehat{B_1B_2}=C_2$ デカコマレタ単一連結ノ面分ニナル。

C_1, C_2 ト半径 O_1A_1, O_1B_1, O_2A_2, O_2B_2 デカコマレタ面分ヲ D'' トシ、コレヲ K_1, K_2 ガ D カラ截取ツタ截片トイ

フコトニスル。

§3. 今 C_1 上ノ点 P_1 ト C_2 上ノ点 P_2 トヲ D'' 内デ折線ニヨリ結ビ，ソレニ沿フテ動点 P ヲ P_1 カラ P_2 ニ移動セシメルト距離 $\rho(P, C_1)$, $\rho(P, C_2)$ ハ ρ ノ連続函数ナル故

$$\rho(P_0, C_1) = \rho(P_0, C_2) = r$$

ナル如キ点 P_0 ガ折線上ニ存在スル。P_0 中心，r 半径ノ円ヲ K_0 トスレバ K_0 ハ D ニ重内接スルコトガ云ヘルノデアル。［何者、コレニハ $K_0 \subset D'$ ガ云ヘレバヨイ譯デアルガ若シ $K_0 \not\subset D'$ ダトスレバ C_1, C_2 ハ K_0 ノ外部ニ属スルカラ円弧 b_1 又ハ b_2 ガ K_0 ト共通点ヲモツ筈デ、従ツテ b_1 又ハ b_2 上ニ一点 Q ガ存在シ $|P_0Q| < r$ トナル。然ラバ線分 P_0Q 上ニハ C_1, C_2 ノ点ハ存在シナイ。サテ b_1, b_2 ハ D'' ノ外部ニ属シ，$P_0 \subset D''$ ナル故 P_0Q ハ D'' ノ境界ト交ハル譯デアルガ、C_1, C_2 トハ交ハレナイノダカラ、ドウシテモ半径 O_1A_1, O_1B_1, O_2A_2, O_2B_2 ノドレカト交ハラナケレバナラヌ。ソウスルト $|P_0Q|$ ハ $\rho(P_0, b_1)$ 又ハ $\rho(P_0, b_2)$ ヨリ大ニナルワケデ矛盾］

P_1, P_2 ヲ結ブ折線上ニハ必ズ斯ノ点ガアルコトガ判ツタ。

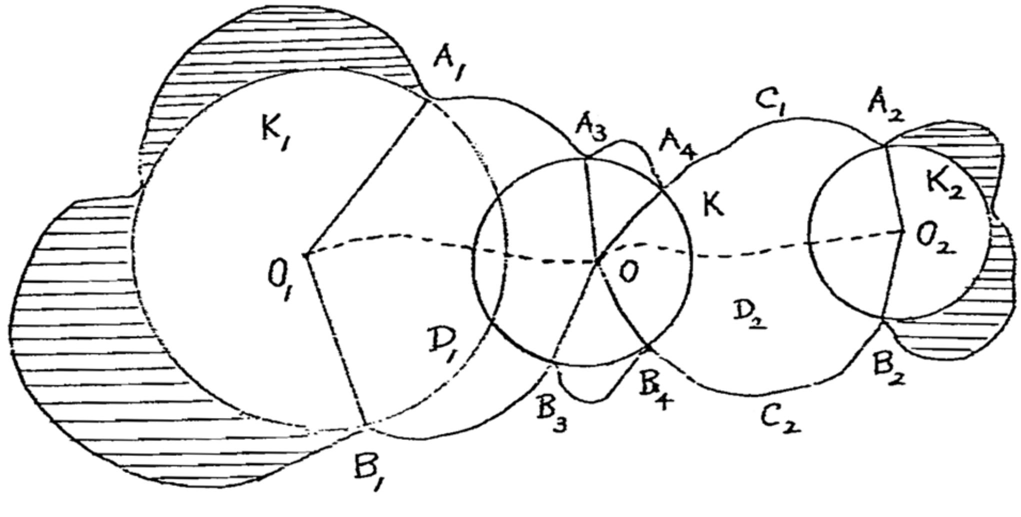
§4. 次ニ上述ノ如キ C_1, C_2 双方ニ於テ内接スル円ヲ無數ニ取レバ，ソノ中心ノ集積点ハ同性質ノ円ノ中心ニナルコトハ明カデアル。

又カヽル円ハ今ノ証明カラ明ナル如ク D' ニ属スルカラ、

ソノ中心ハ D'' ニ属スル。即チ C_1, C_2 双方ニ於テ内接スル D ノ円ノ中心ハ悉ク D'' ニ属シ、O_1, O_2 ヲ附加スレバカヽル集合 $\overline{\overline{O_1O_2}}$ ハ閉集合デアル。

且ツ O_1, O_2 ノ間デ連結デアルカラ、即チ $\overline{\overline{O_1\,O_2}}$ ハ continuum。

§5. 今コノ種ノ円 K（中心ハ O）ヲ考ヘ K_1, K ガ D カラ截取ル截片ヲ D_1 トスレバ，圖ノ如ク D_1 ハ半径 O_1A_1, O_1B_1, OA_3, OB_3 及ビ C_1, C_2 ノ一部ニカコマレタ面分デ、又



K, K_2 ガ D カラキリ取ル截片ヲ D_2 トスルト，D_2 ハ半径 OA_4, OB_4, O_2A_2, O_2B_2 及ビ C_1, C_2 ノ一部ニヨッテカコマレタ面分デアル。半径 OA_3, OA_4, OB_3, OB_4 上ニハ O ヲ除キ脈ノ点ハナイコトハ明デアル。

更ニ C_1, C_2 ニ於テ内接スル円 K' ヲ考ヘルト，$\dot{K}'\cdot\dot{D}$ ハ $\dot{K}\cdot\dot{D}$ ニヨッテ分タレナイ譯故 K' ハ D_1 又ハ D_2 ノ何レカ一方ノ境界ニ重切触シ、従ッテ K' ノ中心 O' ハ D_1, D_2 ノ何レカ一方ニ属スル。即チ $\overline{\overline{O_1O_2}}$ ハ O_1, O_2 ナラザルソノ上ノ一点ニヨッテ左右ニ二分サレル。

以上ニヨリ $\overline{\overline{O_1O_2}}$ ハ Jordanbogen デアルコトガ結論サレル。

O_1, O_2 ヲ D 内デ結ブ Jordan 弧 α ハ必ズ圖カラモ明カナル如ク上記 OA_3, OA_4, OB_3, OB_4 ニ交ハラナケレバナラヌカラ、α ガ脈ノ点カラ成立ツテ居レバ必ズ α ハ O ヲ通過シナケレバナラヌ。即チ脈ノ上デ O_1, O_2 ヲ結ブ Jordanbogen ハ $\overline{\overline{O_1O_2}}$ 以外ニハナイ。

——（定理一ノ証終リ）——

§6. 重内接ノ円周 $\dot{K}$ ガ $\dot{D}$ ニヨリ $a_1, a_2, \cdots\cdots$ ナル円弧ニ分タレルトスレバ，$a_1, a_2, \cdots\cdots$ ヲ弧ニスル扇形内ノ各ニ K ノ中心 O カラ脈ガ出テキルカラ，$a_1, a_2, \cdots\cdots$ ガ三個以上ノ場合 O ハ脈ノ分岐点トナル。

分岐点ノ分岐数ハ高々可附番デアル。分岐点ノ数モ高々可附番ナルコトハ次ノヤウニ考ヘレバ分ル。

平面ノ点ヲ球面 S 上ニ stereographisch ニ寫像スルト D ニ重内接スル円 K ノ像 K^* ハ円デアッテ、コレハ D ノ像 D^* ニ重内接スル、今 K^* ヲ含ム平面ヲ $\mathcal{K}$ トスレバ $\dot{D}^*$ ハ全ク $\mathcal{K}$ ノ片側ニアッテ、コレト重切触スル。コノ逆モ云ヘルカラ K ハ $\dot{D}^*$ ノ konvexe Hülle ニ重切触ス平面 $\mathcal{K}$ ト S トノ交線ノ原像トシテ一般ニ得ラレル。但シ D ノ補集合ノ重内接円ガ同時ニ出ルガ、コレハ分離デキル。脈ノ分岐点ニ對スル K ニハ，$\dot{D}^*$ ノ konvexe Hülle トー ツノ多角形ヲ共有スル切平面 $\mathcal{K}$ ガ對應スル故，ソノ數ハ高々可附番デアル。又ソレ以外ノ K ニ對シテハ Hülle

ト線分ヲ共有スル切平面 K ガ對應スルカラ，コノ近傍デ，K ノ変動ニ對シテ K ノ中心ノ変動ハ線形的、即チ曲線ニハ切線ガ存在スル。（雑ナ言ヒ方デアルガ）即チ

$\boxed{\text{定理二}}$　脈上ノ二点 A, B ヲソノ上デ結ブ *Jordan-bogen* $\overline{\overline{AB}}$ ハ可附番個ノ点（コレハ脈ノ分岐点トナッテキル）ヲ除キ確定シタ切線ヲ有ス。除外ノ点ニ於テハ片側ヅツノ切線ヲ有ス。

脈ハ一般ニ閉集合デハナイ、$\dot{D}$ ガ円弧ヲ含ンデ井ナケレバ末端スラナイ。

§7. 次ノヤウナ問題ガ考ヘラレマスガ、興味ヲ持タレル方ニ解答ヲオ願ヒシマス。

(1) 面分ノ連結数ガ 1 ヨリ大ナラバ，各境界因子(*component*) ヲ取リマク *Jordan* 曲線ガ脈ニ含マレル。

(2) 面分ガ *Jordan* 曲線 Γ デカコマレテキル場合、Γ ノ曲率半徑ガ $>\varepsilon>0$ ナラバ脈ノ末端ヲ附加スルト所謂樹形（*Baum*）ニナルデアラウ。

(3) Γ ガ必ズシモ曲率ヲモタヌトキニモ、脈ガ樹形ニナルノハ如何ナル場合カ、（例ヘバ Γ ト，凡ベテノ半徑 $>\frac{1}{n}$ ナル円トノ交点数ヲ O_n トシタトキ，O_n ガ各自然数 n ニツキ有限ナラバ脈ハ樹形ニナルデアラウ）

(4) 與ヘラレタ集合ガ脈ニナルタメノ條件如何。

(5) 空間ニ拡張シタナラバ如何。（長廻轉楕円体内デ之ニ重内接スル球ノ中心ハ線分ヲツクル。然ルニ扁平廻轉

楕円体ナラバ円盤トナル。空間ニ於テハ脈ハ次元的ニ等質デナイ）